

# Matematisk beskrivning av världen i fysiken.

## Från rum och tid till rumtid.

### Del 1 Klassisk fysik till Einstein

#### 1 Matematik. Punkter

Tillåt mig börja med det enkla nästan självklara.

Med hjälp av tallinjen kan varje punkt på en linje benämnas med ett tal.

En linje är dock tämligen ointressant fysikaliskt ty det kan inte hända så mycket där.

Går vi till en yta, kan vi använda Cartesius koordinatsystem<sup>1</sup>.

Med hjälp av två tallinjer som bildar en vinkel (enklast 90 grader) kan varje punkt P i ett plan anges med hjälp av två tal som ett talpar  $(x,y)$ . Man säger också att punkten P har koordinaterna  $(x,y)$

Om vi tänker oss helt platta varelser kan de stämma träff genom att ange koordinaterna för den punkt där de ska träffas. Observera att det inte räcker med att ange bara ett tal tex  $x=2$  ty det motsvarar en hel linje i koordinatsystemet.

I tre dimensioner behövs tre tallinjer, tre koordinater  $(x,y,z)$ , för att fastställa en punkt.

Tänk er två fjärilar som bestämmer träff en dimmig morgon. De måste ange även höjden  $z$  för att komma till samma punkt i rummet.

Men för att stämma träff behövs en angivelse till. Nämligen tiden.

#### 2. Fysik. Händelser

Att stämma träff i  $P=(x,y,z)$  på morgonen är inte detsamma som att stämma träff i P på kvällen. Här talar man då i fysiken om två olika **händelser**

$P_{\text{morgon}}=(x,y,z,\text{morgon})$

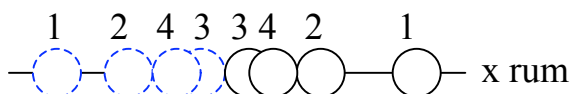
$P_{\text{kväll}}=(x,y,z,\text{kväll})$  eller mer matematiskt  $P_m=(x,y,z,t_1)$  och  $P_k=(x,y,z,t_2)$

Det är detta att händelser i fysiken måste anges med 4 tal som konstituerar att vår värld är fyrdimensionell: 3 rumsdimensioner och 1 tidsdimension.

Vi kan peka på och röra oss i alla 3 rumsdimensioner : längd, bredd och höjd eller fram-tillbaka, höger-vänster och upp-ner.

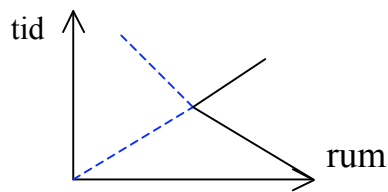
Vi ”använder” förstås i någon mening tiden då vi rör oss men vi kan inte peka på tiden den har ingen riktning i rummet. Det är alltså en kvalitativ skillnad mellan rum och tid. Vi kan dock rita tiden som rum i s.k. rörelsedigram:

Om vi vill rita hur två klot rör sig mot varandra på  $x$ -axeln och sen krockar och rör sig från varandra blir det en mycket grötig bild. (siffrorna anger klotens placering vid den tidpunkten.)



<sup>1</sup> Cartesius själv har berättat att han inför ett stort militärt slag fick en uppenbarelse av Sanningens ängel som sa att han skulle bli forskare och visade honom bl.a. koordinatsystemet.

Men om vi ritar det i ett rörelsedigram med tiden som rum blir det tydligare:



Vidare gäller som Minkowski (1908) påpekat:

*The objects of our perception invariably include places and times in combination. Nobody has ever noticed a place except at a time or a time except at a place.*<sup>2</sup>

Detta skrevs alltså efter Einsteins relativitetsteori (1905) men gällde naturligtvis även innan. Men trots detta betraktades rum och tid som (mer) separata i den klassiska fysiken bl.a. av skäl som följer.

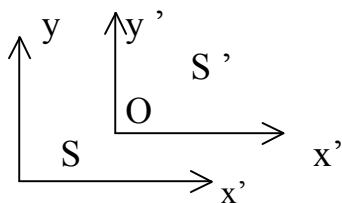
### 3. Koordinattransformationer och klassisk fysik

Vi kan naturligtvis välja olika koordinatsystem eller referenssystem. En och samma punkt P får då olika namn i olika system, tex.  $(x, y)$  och  $(x', y')$  i S resp S'. Det är också lätt att vara helt överens om hur namnen, koordinaterna översätts i varandra s.k. koordinattransformationer.

Låt  $O'=(0,0)$  i S' och  $O'=(3,2)$  i S

Då gäller allmänt för en punkt  $P=(x, y)=(x', y')$

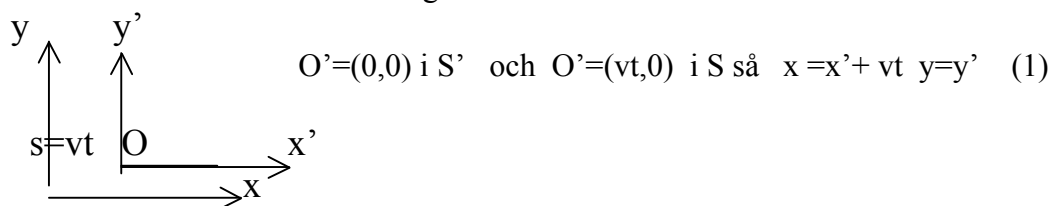
$$x = x' + 3 \quad \text{och} \quad y = y' + 2$$



Sådana koordinattransformationer kan förstås enkelt generaliseras till 3 och högre dimensioner i matematiken.

Vi kan också vrida systemen så att x och y blandas men vi kommer i fortsättningen för enkelhetens skull låta rumsaxlarna  $(x, y, z)$  i de olika systemen vara parallella.

Vi kan också ha referenssystem som rör sig i förhållande till varandra vilket är av större intresse i fysiken. Vi kommer i fortsättningen även tänka att S och S' rör sig i förhållande till varandra ut efter x-x' axlarna med hastigheten v och att y axlarna sammanfaller. Om systemen antas sammanfalla då tiden är 0 gäller<sup>3</sup> enl  $s=vt$



<sup>2</sup> Minkowski Space and time, 1908 cit från The principle of relativity Dover 1952.

<sup>3</sup> Vi inför här nu utan vidare analys hastighetsbegreppet och sambandet mellan sträcka hastighet och tid  $s=vt$ . Antagligen måste även detta enkla analyseras djupare när vi går vidare. Se del 2.

I den klassiska fysiken gäller mellan två system som rör sig med hastigheten  $v$  i  $x$ - $x'$  axlarnas riktning den s.k. Gallilei-transformationen GT

$$\begin{aligned}x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'\end{aligned}\quad (2)$$

Vi har antagit att  $t=t'$ . Detta i linje med Newtons antagande att tiden är absolut given (av Gud) och samma för alla. Och rummet sågs som en stor behållare.

Innan Einstein var det ingen som ifrågasatte detta och det gjordes väl därför inga experiment. Men skulle det ha gjorts experiment tex om man ställde klockor och de sen rörde sig i förhållande till varann skulle det visa sig att de visade samma tid dvs att antagandet var bekräftat.

Likaså om man hade jämfört två meterstavar i vila och i relativ rörelse skulle de i bägge fallen visa sig lika långa.

En stav  $AB$  i vila i  $S'$  har koordinaterna  $A=(x'_1, y'_1)$  resp  $B=(x'_2, y'_1)$

Dä är längden av  $AB$  i  $S'$   $x'_2 - x'_1$ .

Ska man mäta en meterstav i rörelse måste man titta på bägge ändar vid samma tidpunkt  $t_m$ .

I  $S$  där  $A=(x_1, y_1)$  resp  $B=(x_2, y_1)$  blir

längden av  $AB$   $x_2 - x_1$ .

Enl (1) där  $x = x' + vt'$  får vi  $x_2 = x'_2 + vt_m$  och  $x_1 = x'_1 + vt_m$  varför

$x_2 - x_1 = x'_2 + vt_m - (x'_1 + vt_m) = x'_2 - x'_1$  dvs samma längd av  $AB$  i bägge systemen.

Detta verkar självklart men har här beskrivits som jämförelse med vad Einstein sen gör.

GT gällde även i en djupare teoretisk mening såtillvida att alla kända lagar i fysiken var invarianta under denna transformation dvs om man byter ut koordinater i  $S$  mot koordinater i  $S'$  får man samma formler. Detta är mekanikens relativtesprincip: Mekanikens lagar är invarianta för GT:

Detta har den fysikaliska meningen alla fysikens lagar ser likadana ut för alla som använder system i likformig ( $v$ =konstant) rörelse.

Ex: Ur Newtons rörelselag  $F = m \cdot a$  och

Newton's gravitationslag  $F = m_1 \cdot m_2 / r^2$

får vi

$$ma = m_1 \cdot m_2 / r^2$$

Enl GT är  $x = x' + vt'$  och  $t = t'$

varför  $r = x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 = r'$

Vidare får vi genom derivering och GT

$$dx/dt = dx'/dt' + v \text{ och } a = d^2x/dt^2 = d^2x'/dt'^2 = a'$$

varför

$$ma = m_1 \cdot m_2 / r^2 \Rightarrow ma' = m_1 \cdot m_2 / r'^2$$

dvs samma lag i S som i S' om vi antar att massorna är samma dvs oberoende av hastigheterna. (Här har som man gjorde antagits att m inte beror på hastigheten.)

## 4. Elektromagnetism och Maxwells ekvationer

För ca 2500 år sedan upptäcktes dels magnetism dels statisk, gnidnings-, elektricitet som fenomen helt var för sig.

I samband med världsomseglingar noterades att kompassen snurrade då det blixtrade så blixten var på något sätt magnetisk.

På 1700 talet skickade Benjamin Franklin upp en drake med en ledande lina och när blixten slog ner i den laddade den upp ett elektroskop som alltså mäter elektricitet. Så blixten var också elektrisk så man började tänka att magnetism och elektricitet hade något samband.

På den tiden kunde elektricitet bara skapas genom gnidning tex med olika maskiner. När Galvani som var professor i anatomi höll på med elektricitetsmaskiner och skapade gnistor ryckte det till i ett dissekerat grodlår. Galvani antog då en animal elektricitet, som vi idag vet är rätt. Volta som var en mer jordnära fysiker angrep Galvani och menade att det var att pincetter som använts bestod av två metaller som skapade ström. För att visa att han hade rätt konstruerade Volta sin stapel av zink och silver och saltlösning och världen fick sitt första batteri ( i modern tid) som nu gav kontinuerlig ström och inte bara gnistor.

Nu kunde Ørsted med Voltas stapel visa att en ström gav ett magnetfält och sen visade Faraday det omvända att ett, variabelt magnetfält gav ström i en spole. Faraday var den som införde fältbegreppet.<sup>4</sup>

Sedan gjorde han och andra flera upptäckter om elektromagnetismen .

Maxwell var sedan den som gav all denna kunskap en koncis matematisk form. Visserligen tänkte han konkret på elektricitet som vibrationer och virvlar i något medium som vi inte längre gör idag men han lyckades så hitta de formler som beskrev all då känd kunskap om elektriska E och magnetiska B fält och dessutom förutsade nya fenomen.

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu\sigma\bar{E} - \mu\epsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

---

<sup>4</sup> I Vetenskapen värld på Tv1 visades nyligen en film om E=mc<sup>2</sup> där även Faradys arbete beskrevs. Farady var religiös och trodde på en allt genomsyrande gudomlig enhet och det tycks som det var detta att så starkt tro på något andlig icke-materiellt som bidrog till att han kunde upptäcka det fruktbara med fält som ju är verksamma men ej materiella.

När man löste dessa ekvationer (för vakuum) fann man matematiska uttryck som man kände igen från vågutbredning och man kunde förutsäga att det fanns elektromagnetiska vågor med hastigheten

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Det är anmärkningsvärt att man här från elektriska resp magnetiska konstanter  $\epsilon_0$  resp

$\mu_0$  kunde få en hastighet som dessutom var den samma som ljusets varför det var naturligt att identifiera ljus med elektromagnetiska vågor.

Men alla kända vågor, som vatten och ljud hade sitt medium. Vad svängde de e-m vågorna och ljus i? Då spekulerade man att det var i etern.

Men nu uppstod allvarliga problem. Maxwells ekvationer är inte invarianta om man gör en Gallielitetransformation (2) sid 4.

Det tycktes därför att Maxwells ekvationer bara gällde i ett system som antogs vara i vila i etern. Detta var teoretsikt sett inte tillfredsställande.

Men värre blev det när man försökte undersöka jordens hastighet i etern som Michelson –Morley gjorde. Det gick inte att mäta någon sådan hastighet.

Flera hypoteser för att förklara detta infördes tex att jorden släpade med sig etern. Detta borde dock påverka hur vi kunde se stjärnor men stämde inte med andra experiment.

Lorentz kom med en hypotes att materiella kroppar som rörde sig i etern krympte i längsriktningen, pga att krafterna mellan atomer påverkades, precis i sådan grad att det upphävde alla mätbara effekter av rörelser i etern.

Inte helt ofysikaliskt med kändes ändå lite ad hoc. Lorentz teori medförde också att klockor som rörde sig gick saktare och att kroppars massa ökade när det rörde sig. Allt i strid med klassiska fysikens teori och experimentella resultat.

Jag tror också att Lorentz kunde få fram de formler som bär hans namn och kunde visa att dessa lämnade Maxwells ekvationer oförändrade men som Einstein gav en mer klar och enkel fysikalisk grund till även om det också radikalt bröt med den klassiska synen på rum tid och rörelse.

Som ofta när det gäller svåra problem kan lösningen ligga i att vända på det helt. Istället för att se det som ett problem att man inte kunde mäta olika hastigheter för ljuset beroende på rörelse i förhållandet till en antagen eter så övergav Einstein hypotesen om etern och tog som **Postulat 1**. Ljusets hastighet är alltid densamma för alla observatörer i likformig rörelse i förhållande till varandra.

Det andra postulatet var en generalisering av Mekanikens relativitetsprincip.

**Postulat 2** Fysikens alla lagar är lika i alla inertialsystem (= system som rör sig med konstant hastighet relativt varandra).<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Detta kallade Einstein för relativitetsprincipen och som gav upp till namnet relativitetsteori då också rum och tid mm visade sig vara relativa. Men han övervägde också att kalla teorin absolutteori då den också visade vad som var absolut dvs samma för alla observatörer som tex ljushastigheten och fysikens lagar. Självt tycker jag demokratiprincipen är ett bra namn.

Utifrån dessa två postulat och några andra enkla antaganden som ansågs självklara och överensstämde med den klassiska fysiken kunde nu Einstein härleda de nya sambanden mellan rum och tid, koordinattransformationerna LT för mätningar av händelser i olika system, de sk Lorentz transformationerna som ersatte Gallilei transformationen. Nu var det Maxwells ekvationer som är invarianta under LT och mekanikens lagar som fick ändras.

LT mellan systemet S' med  $(x',y',z',t')$  och S med  $(x,y,z,t)$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad y=y' \quad z=z'$$

Ur detta följer tex att kroppar krymper i längsriktningen, klockor i rörelse går saktare.

Dvs rum och tid är relativa.

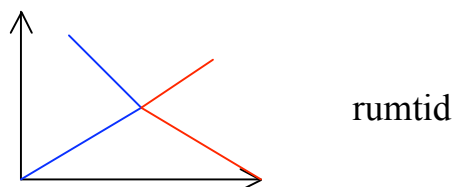
Men det som är absolut är ”avståndet i rumtiden”

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = ds'^2$$

Det är som det finns något ”objekt” i den fyrdimensionella rumtiden som ser likadan ut för alla men som kan delas upp på olika sätt i rum och tid. Jämför med hur en längd får olika projektioner på olika axlar.

Det är därför som man kan betrakta rumtiden som mer grundläggande än rum och tid för sig. En som speciellt betonat detta är just Minkowski som också skrev

.. the word *relativity postulate* for the requirement of an invariance... seems to me very feeble. Since the postulate comes to mean that only the four-dimensional world in space and time is given by phenomena but that the projection in space and time may still be undertaken with a certain degree of freedom, I prefer to call it the *postulate of the absolute world* ( or briefly, the world –postulate)



Jag vet inte om alla fysiker ser det så men i vilket fall är rumtiden ett bra teoretiskt instrument och att göra bilder av skeenden. Frågan är om det är öppet för direkt upplevelse.

Den frågan svarar nog inte fysiken på men det tar jag upp i

del 3. Sex dimensioner och medvetande

Men före det ska del 2 komma

Del 2 Överljushastighet och sex dimensioner?