**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Teoría de la Producción

**Pablo Serra**

República 701, Casilla 2777, Santiago – Chile, Junio 1988. Esta versión: Marzo 2003

# 1. Tecnología

En estas notas se supone que los insumos que intervienen en el proceso de producción son medibles cardinalmente. Otros factores, como la moral de la fuerza de trabajo o la información, que también afectan al proceso de producción, pero que no son medibles cardinalmente, son tomados como parámetros. Asimismo, es necesario tener presente que la producción no es un nivel sino que está referida al tiempo.

En lo que sigue supondremos que una firma utiliza **n** insumos distintos, que designamos $x_1,......, x_n$, para producur **m bienes** que denotamos $q_1,....,q_m$. Un proceso productivo determinado puede ser visto como posible o imposible. T designará al conjunto de producciones posibles, o simplemente Conjunto de Producción, dada la tecnología existente. Luego un vector (x, q) está en T si es un par tecnológicamente posible. Por cierto que el conjunto T se modifica con el avance tecnológico.

En lo que sigue analizamos algunos axiomas útiles para caracterizar la tecnología.

## 1.1 Axiomas

a) *Posibilidad de inacción:* El par (0,0) pertenece al conjunto T.

b) *Eliminación sin costo*: Sea (x, q) en T, si $x^1 \geq x$ , y $q^1 \leq q$, entonces $(x^1,q^1) \in T$.

c) *Imposibilidad de obtener algo de nada:* Si $(0, q) \in T$, entonces q = 0.

d) *Acotamiento:* Existe $\beta > 0$ tal que $PqP \leq \beta PxP$ para cualquier par (x, q), donde PPes alguna norma.

e) *T es cerrado.* Luego para toda sucesión $(x^s, q^s)$ en T, si $x^s \rightarrow x^*$ y $q^s \rightarrow q^*$, entonces $(x^*, q^*) \in T$.

f) *Aditividad:* Si $(x^a, q^a)$ y $(x^b, q^b)$ están en T, entonces $(x^a + x^b, q^a + q^b)$ pertenece a T.

g) *Divisibilidad:* Si $(x, q) \in T$, entonces $(\alpha x, \alpha q) \in T$ para cualquier $\alpha$ en [0, 1].

h) *T es cuasi-convexo:* Si los pares (x, q) y $(x^1, q)$ pertenecen al conjunto T, entonces $(\sigma x+(1-\sigma)x^1, q)$ también está en T para cualquier $0 \leq \sigma \leq 1$. O dicho de otro modo, el conjunto de los x tal que (x, q) pertenece a T es convexo para todo q.

i) *T es un convexo*. Es decir, si los pares $(x^a, q^a)$ y $(x^b, q^b)$ pertenecen al conjunto T, entonces $(\sigma x^a+(1-\sigma)x^b, \sigma q^a+(1-\sigma)q^b)$ también está en T, para cualquier $0 \leq \sigma \leq 1$.

### Comentarios

**(i)** La posibilidad de inacción indica que no existen costos hundidos. Es decir, que no se han tomado decisiones de producción que son irrevocables.

**(ii)** Disponibilidad sin costo refleja la idea que siempre es posible absorber más insumos sin disminuir la producción.

**(iii)** El axioma de acotamiento implica al de imposibilidad de producir algo de la nada. El axioma de acotamiento también elimina la posibilidad de tener productividades marginales infinitas como se ilustra con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo:** $n = 1$, $m = 1$, $q = \notin x$. Si se cumple el axioma de acotamiento $PxP \leq \beta PxP$, luego $\notin x \leq \beta x$. Por lo tanto $\beta \geq 1 / \notin x$, y cuando $x \to 0$, $\beta \to \infty$.

**(iv)** El axioma de aditividad descarta la posibilidad de que existan externalidades negativas, así como la existencia de rendimientos decrecientes a escala.

**(iv)** El axioma de divisibilidad indica rendimientos no-crecientes a escala, dado que cualquier proceso productivo se puede replicar a una escala menor.

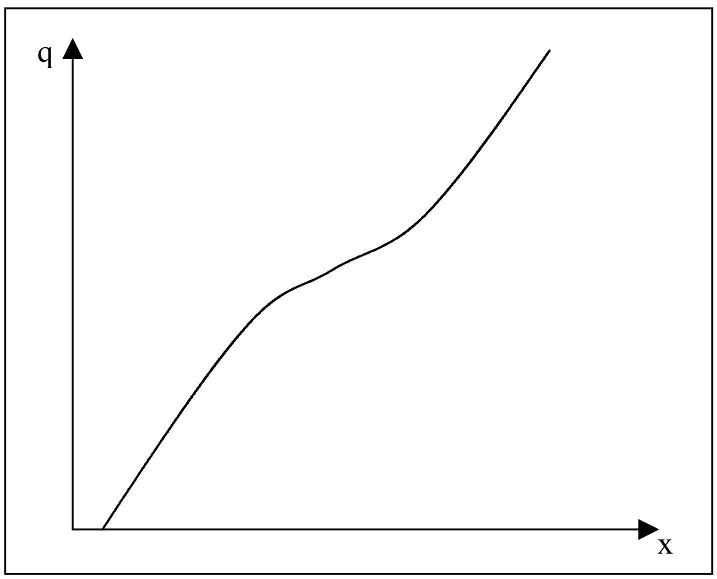



**Figura 1: Tecnología cuasi-convexa**

**(v)** Cuasiconvexidad por su parte expresa la idea que la diversidad en los insumos es positiva, o dicho de otro modo que las combinaciones balanceadas de insumos son mejores.

**(vi)** Por su parte convexidad agrega a la cuasiconvexidad el concepto de rendimientos no-crecientes a escala. Es decir, el axioma de convexidad implica los axiomas de cuasiconvexidad y divisibilidad, lo cual es muy fácil de probar. La figura 1 ilustra una tecnología que no es convexa pero si es cuasiconvexa.

**(vii)** A grandes rasgos, las tecnologías T cumplen los 5 primeros axiomas. Los 4 siguientes son más restrictivos, pero en general la teoría no los requiere. Sin embargo, muchos desarrollo teóricos se simplifican si se supone que la tecnología es cuasi-convexa.

**Prop. 1**: Si se cumplen los axiomas de aditividad y divisibilidad, entonces el conjunto T es un cono convexo.

**Dem.**: *T es un cono.* Debemos probar que si $(x, q) \in T$, entonces $(\alpha x, \alpha q) \in T$ para cualquier $\alpha \geq 0$. Podemos escribir $\alpha = n+\beta$ donde n es el mayor entero contenido en $\alpha$, por lo que $0 \leq \beta \leq 1$. Por divisibilidad $(\beta x, \beta q) \in T$, por aditividad $(x+x+....+x+\beta x, q+q+....+\beta q) \in T$.

*T es convexo.* Sean $(x^a,q^a)$ y $(x^b,q^b)$ dos pares en T, $0 \leq \sigma \leq 1$. Como $(x^a,q^a) \in T$, entonces por axioma de divisibilidad $(\sigma x^a,\sigma q^a) \in T$, por igual razón $((1-\sigma)x^b, (1-\sigma)q^b)$ está en T. Finalmente por aditividad $(\sigma x^a+(1-\sigma)x^b, \sigma q^a+(1-\sigma)q^b)$ está en T, para cualquier $0 \leq \sigma \leq 1$.

Luego los axiomas de aditividad y divisibilidad conjuntamente implican que la tecnología presenta retornos constantes a escala.

## 1.2 Función de Producción

En lo que sigue restringimos el análisis a industrias monoproductoras, es decir, a aquellas para las cuales q es escalar.

**Def.**: La función de producción f( ) asocia a cada vector x la mayor producción que es posible obtener a partir del vector de insumos x, es decir:

$$f(x) = \underset{q}{\mathrm{Max}} \{q \mid (x, q) \in T\}$$

La función de producción corresponde a la frontera "superior" del conjunto de tecnologías posibles T.

**Prop. 2:** Si la tecnología cumple los axiomas de inacción, disponibilidad sin costo, acotamiento y T es un conjunto cerrado, entonces la función f está bien definida.

**Dem.**: Se define el conjunto $Q_x = \{q \mid (x , q) \in T\}$. Para probar el resultado es necesario mostrar que $Q_x$ es no vacío y compacto. Por axioma de inacción (0, 0) está en T. Además, por axioma de disponibilidad sin costo (x, 0) también está en T, por lo que el conjunto $Q_x$ no es vacío. El axioma de acotamiento implica que $Q_x$ es acotado, y por ser T un conjunto cerrado $Q_x$ también lo es. Luego $Q_x$ es un compacto.

**Prop. 3**: Si la función de producción cumple el axioma de convexidad, entonces la función de producción es cóncava.

**Dem.**: Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x^1}$ dos vectores de insumos cualesquiera. Entonces debemos probar que los elementos $f(\alpha x+(1-\alpha)x^1) \geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x^1)$. Como $(x, f(x))$ y $(x^1, f(x^1))$ están en T, $(\alpha x+(1-\alpha)x^1, \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x^1))$ también pertenece a T por axioma de convexidad. El resultado se sigue de la definición de la función de producción.

*Conjetura*: *Si la función de producción está bien definida y además se cumple el axioma de cuasiconvexidad, entonces la función de producción es continua.*

**Def.:** Sea A un conjunto convexo en $R^n$, una función $f : A \rightarrow R$ se dice cuasicóncava si el conjunto:

$$Q_q = \{ x \in A \mid f(x) \geq q \}$$

es convexo para cualquier q.

Es fácil ver que si n = 1 y la función f es continua, entonces es cuasicóncava si y sólo si f'(x) es no decreciente para todo x en A. En consecuencia, es simple encontrar una función cuasicóncava que no sea cóncava.

**Prop. 4**: Toda función cóncava es cuasicóncava.

**Dem.:** Sean **x** e **y** dos elementos en $Q_q$, es decir $f(x) \geq q$ y $f(y) \geq q$. Luego por concavidad de la función f se tiene que $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \geq q$. Por lo tanto $\alpha x+(1-\alpha)y$ también está en $Q_q$, para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

**Prop. 5:** Si la función de producción está bien definida y la tecnologíia cumple el axioma de cuasiconvexidad, entonces la función de producción es cuasicóncava.

**Dem.**: Consideremos **x** e **y** dos elementos en el conjunto $Q_q$, luego por disponibilidad sin costo (x, q) e (y, q) están en T, por axioma de cuasiconvexidad $(\alpha x+(1-\alpha)y, q)$ también está en el conjunto T, por lo que $\alpha x+(1-\alpha)y$ pertenece a $Q_q$.

**Prop. 6:** Si la función de producción está bien definida y además se cumplen los axiomas de aditividad y divisibilidad, entones es homogénea de grado uno.

**Dem.:** Para demostrar que la función de producción es homogénea de grado uno hay que probar que para cualquier $\alpha$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Como $(x, f(x)) \in T$, por proposición 1 se tiene que $(\alpha x, \alpha f(x)) \in T$, para cualquier $0 \leq \alpha \leq 1$, luego $f(\alpha x) \geq \alpha f(x)$.

Definiendo $x^1 = \alpha x$, se tiene que $(x^1, f(x^1)) \in T$. Luego $(x^1/\alpha, f(x^1)/\alpha) \in T$, por lo que $f(x^1/\alpha) \geq f(x^1)/\alpha$. Luego $f(x) \geq f(\alpha x)/\alpha$, de donde se sigue que $f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$.

La interpretación económica de una función de producción homogénea de grado uno es que la tecnología exhibe retornos constantes a escala. Una función de producción cuasi-cóncava expresa la idea que las combinaciones balanceadas de insumos son mejores. La concavidad de la función de producción agrega la idea que los retornos a escala no son crecientes.

## 1.3 Productividad Marginal

La curva de producción total para un insumo, se obtiene fijando todos los factores menos uno, digamos el primero. Entonces la curva de producción total del insumo 1 está dada por:

$$t_1(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^0)$$

donde $x_i^0$ representa el nivel fijo del insumo i, $i \geq 2$. La curva de producción total de un insumo determinado es cóncava cuando la tecnología exhibe retornos constantes a escala.

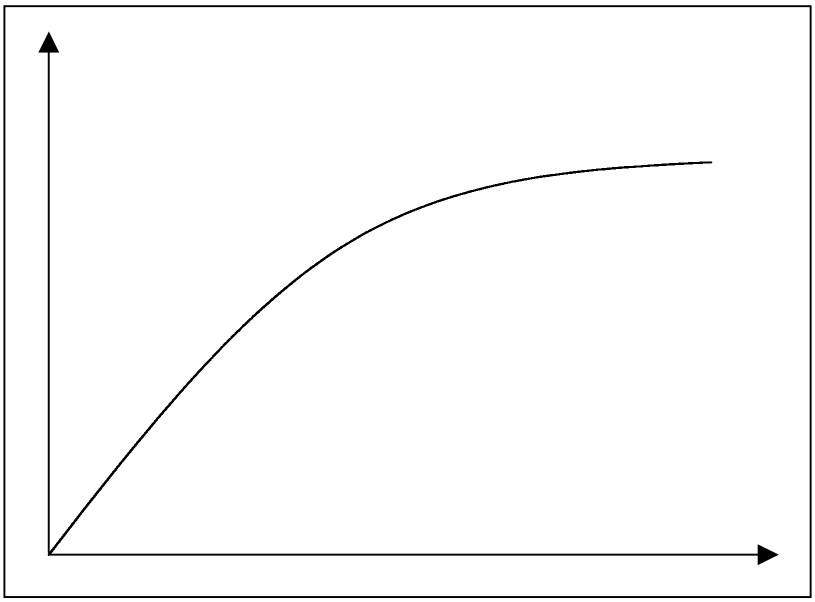


**Figura 2: Curva de Producción Total Bien 1**

**Def.**: Se llama productvidad marginal del insumo i ($PM_i$) a la pendiente de la curva de producción total de dicho insumo, es decir

$$PM_i(x_i) = \frac{dq}{dx_i} = t_i'(x_i)$$

donde $q = f(x_1^0, x_2^0, .., x_i, \ldots\ldots\ldots, x_n^0)$.

**Prop. 7:** Si se cumple el axioma de disponibilidad sin costo, la productividad marginal es no-negativa, es decir, la pendiente de la curva de producción total es no-negativa.

**Dem.:** $q + Aq = f(x_1+Ax_1, x_2^0, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^0)$

Si $Ax_1>0$, el axioma de disponibilidad sin costo implica que $Aq\geq 0$, de donde se sigue que:

$$f_1 = t_1'(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_1} \geq 0$$

donde $f_i$ denota la derivada de la función f con respecto al argumento i.

**Prop. 8:** Si la tecnología es convexa, entonces la productividad marginal es no-creciente.

**Dem.:** Suponiendo que la función de producción es dos veces diferenciable el resultado es inmmediato. En efecto, la convexidad de la tecnología implica que la función de producción es cóncava, lo que a su vez determina que los $f_{ii}$, es decir las derivadas de las productividades marginales, sean no-crecientes.

## 1.4 Isocuantas de producción

**Def.:** Llamaremos isocuanta de producción a la frontera del conjunto $Q_q$, es decir al conjunto $\{x \mid f(x) = q\}$

Si para cualquier punto $(x_1, x_2,....., x_{n-1})$ en $R^{n-1}$ existe una única solución para la igualdad $f(x_1,.......,x_n) = q^0$, ésta define implicitamente a $x_n$ como función de $x_1$, $x_2$,....$x_{n-1}$. Podemos llamar h a la función de $R_+^{n-1}$ en $R_+$ así definida, entonces $x_n = h(x_1, x_2,....., x_{n-1})$ satisface

$$f(x_1, x_2, .... , x_{n-1}, h( x_1, x_2, ....., x_{n-1})) = q^0$$

**Prop. 8**: Si la función de producción es cuasi-cóncava y se cumple el axioma de dsiponibilidad sin costo, entonces la función h es convexa.

**Dem.:** Sean $x^1$- y $x^2$- dos elementos cualesquiera en el dominio de la función h. Debemos mostrar que

$$h(\alpha x^1\text{-} + (1-\alpha)x^2\text{-}) \leq \alpha h(x^1\text{-}) + (1-\alpha)h(x^2\text{-}), \text{ para cualquier } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Por definición de h se tiene que $f(x^i\text{-}, h(x^i\text{-})) = q^0$, i = 1, 2. Dada la cuasiconcavidad de la tecnología

$$f(\alpha x^1\text{-} + (1-\alpha)x^2\text{-}, \alpha h(x^1\text{-}) + (1-\alpha)h(x^2\text{-})) \geq q^0$$

de donde se deduce, recordando que la productividad marginal de un insumo es positiva, que

$$\alpha h(x^1\text{-}) + (1-\alpha)h(x^2\text{-}) \geq h(\alpha x^1\text{-} + (1-\alpha)x^2\text{-}).$$

Luego cuando la tecnología es cuasicóncava las isocuantas de producción son convexas, tal como son dibujadas en los libros de texto. Si además suponemos que se cumple el axioma de disponibilidad sin costo, entonces las isocuantas no se cruzan y en la medida que el nivel de producción sea mayor están más distantes del origen.

## 1.5 Tasa Marginal de Sustitución Técnica

**Def.** La Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TMST) entre dos factores mide en cuantas unidades se debe aumentar el uso de un factor, si se quiere mantener la producción constante cuando la disponibilidad del otro factor disminuye en una unidad.

En esta definición se consideran sólo 2 factores productivos, los otros se pueden suponer constantes. Entonces escribiremos la isocuanta $f(x_1, x_2) = q^0$, la cual define implícitamente a $x_2$ como función de $x_1$ , es decir $x_2 = h(x_1)$ donde $f(x_1, h(x_1)) = q^0$. Entonces la TMST está dada por:

$$TMST = \frac{dx_2}{dx_1} = h'(x_1)$$

Por lo cual la TMST es igual a la pendiente de la isocuanta.

Por teorema de la derivada implícita se tiene que $f_1 + f_2 h' = 0$, luego:

$$TMST = -\frac{f_1}{f_2}$$

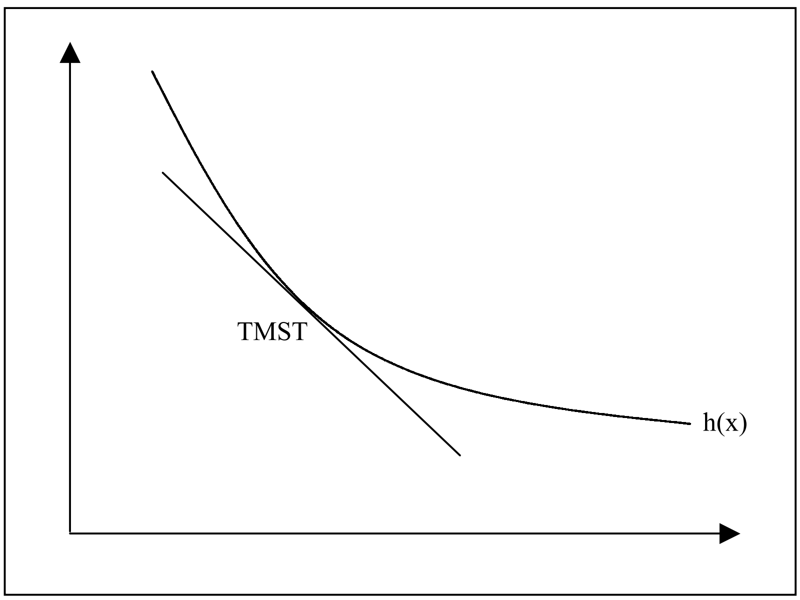



**Figura Nº 3:Tasa Marginal de Sustitución Técnica**

Si la función f es cuasicóncava, entonces la función h es convexa ($h'' \geq 0$). Lo cual implica que a medida que disminuye la cantidad disponible del factor 1 se necesitan más unidades del factor 2 para sustituir una unidad del bien 1. En resumen, tecnología cuasiconvexa implica que es difícil sustituir un factor cuando este es escaso, y en este caso las isocuantas tienen la forma con la que tradicionalmente se las dibuja en los libros de texto.

# 2. Función de Costos

## 2.1 El problema de minimización de costos

En esta parte se deriva la función de costos de la firma. Para ello se supone que la firma busca minimizar sus costos, lo que es un concepto más amplio que maximizar utilidades. Por ejemplo instituciones sin fines de lucro debieran minimizar sus costos.

La firma minimiza costos sujeta a la información tecnológica y de mercado.

- **Información Tecnológica:** Describe las posibilidades productivas de la firma.

- **Información de Mercado** : Indica el precio de los insumos.

Por simplicidad estudiaremos el caso de una firma monoproductora cuya tecnología está resumida en su función de producción. Además suponemos que la firma es tomadora de precios en los mercados de sus insumos. Nos centramos en las decisiones de largo plazo, es decir, cuando todos los insumos son variables (mano de obra, materias primas, maquinarias, etc. )

Problema Particular. Consideremos en primer lugar el problema de una firma que debe producir una cierta cantidad, digamos $q^0$, a mínimo costo. Los precios de los insumos están dados por un vector $(r^0_1, r^0_2, ..., r^0_n)$. Entonces el problema de minimizar costos es:

$$\min \quad r^0_1 x_1 + r^0_2 x_2 + ........ + r^0_n x_n$$

$$\text{s.a.} \quad f(x_1, .... , x_n) \geq q^0$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., n$$

donde $x_i$ denota el consumo o uso del insumo i. Dados los valores $q^0, r^0_1, r^0_2, ..., r^0_n$ existe una solución numérica $x^0$, correspondiente a la lista de insumos usados en la solución óptima, a la cual está asociada el valor $c^0$ correspondiente al mínimo costo de producir $q^0$.

Encontraremos la solución usando las condiciones de Kuhn-Tucker. Definamos para ello:

$$L = r^0_1 x_1 + ...... + r^0_n x_n + \lambda (q^0 - f(x_1, ...., x_n))$$

Donde $\lambda$ denota el multiplicador de Lagrange asociado a la condición de satisfacer la demanda. Entonces las condiciones de Kuhn-Tucker se pueden expresar como:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = r_i^o - \lambda^0 f_i \geq 0 \qquad\qquad x_i (r_i^o - \lambda^0 f_i) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = q^0 - f(x_1^0, ....., x_n^0) \geq 0. \qquad\qquad \lambda^0 (q^0 - f(x_1^0, ....., x_n^0)) = 0.$$

En este problema, dado que la función que se minimiza es lineal y por lo tanto convexa, las condiciones de Kuhn-Tucker son suficientes cuando el conjunto sobre el cual se minimiza es convexo. Y en este problema, el conjunto es convexo si y sólo si la función f es cuasicóncava. Además si la función f es estrictamente cuasicócava entonces la solución es única. Si la función de producción no es cuasicóncava, entonces la solución óptima será uno o varios de los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

Si la solución es interior, es decir $x^0_i > 0$, i = 1 , ..., n, como habitualmente se supone en los libros de texto, las condiciones de Kuhn-Tucker se reducen a:

$$\lambda^0 = \frac{r_i^0}{f_i}$$

Además entre cualquier par de insumos *i* y *j* se tiene:

$$\frac{f_j}{f_i} = \frac{r_j}{r_i}$$

En consecuencia, la tasa marginal de sustitución técnica es igual a la relación entre los precios de ambos insumos.

En el siguiente gráfico se ilustra la condición anterior.

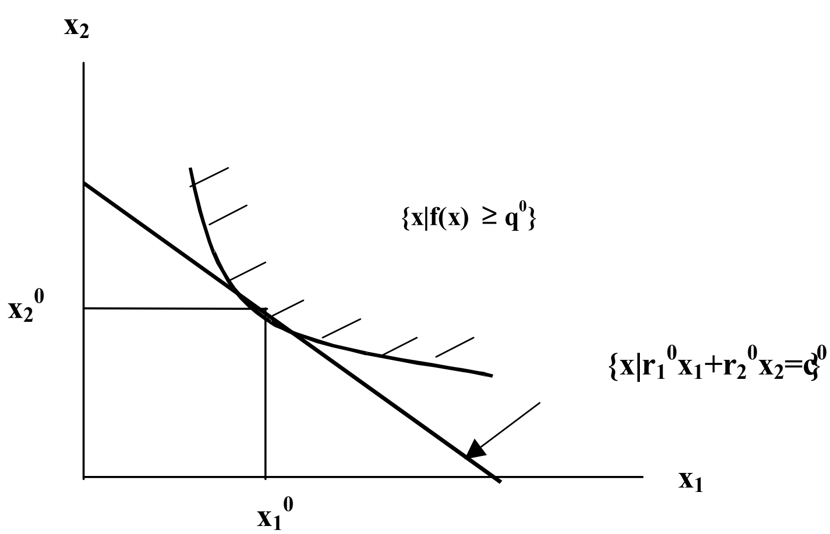



**Figura Nº 4: Minimización de Costos**

Problema General. En lo que sigue buscamos caracterizar la solución al problema de minimización de costos para los diferentes valores que las variables q y r pueden adoptar. Formalmente lo expresamos como:

$$Min\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$sa: f(x) \geq q$$
$$x \geq 0$$

Suponemos que las productividades marginales son positivas, por lo que la primera restricción se cumple siempre como igualdad. Nos centramos en el caso que la tecnología es estrictamente convexa. Ello determina que para cada vector (q, r) la solución óptima sea única. Luego, la solución del problema general son funciones que describen la solución óptima en función de los valores de r y q.

- *Funciones de demanda condicional (en el nivel de producción) por insumos*

$$x_i = w^i(q, r) \qquad i = 1,\ldots\ldots, n$$

La función $w^i$ describe la solución al problema general de determinar cuántas unidades del factor i se requieren para producir q unidades a mínimo costo cuando los precios de los factores están dados por el vector r. Estas funciones tienen n+1 argumentos $(q, r_1, ..., r_n)$. Por conveniencia de notación la producciónm q será el argumento cero y el precio $r_i$ el i-ésimo argumento.

- *Multiplicador de Lagrange*

$$\lambda = w^0(q, r)$$

La conveniencia de la notación anterior, que asocia al multiplicador de Lagrange con el argumento cero, quedará justificada más adelante.

- *Función de costos*: $C = \Phi(q, r)$

Esta función entrega para cualquier vector (q, r) el mínimo costo de producir q cuando los precios de los insumos están dados por el vector r.

La solución de cualquier problema particular se obtiene a partir de la solución general reemplazando en ésta los n+1 parámetros por valores numéricos.

Identidades. Es directo verificar que se cumplen las siguientes identidades:

* $$\Phi(q,r) \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i w^i(q,r)$$
* $$f(w^i(q, r)), \ldots\ldots, w^n(q, r)) \equiv q$$

## 2.2 Ejemplo

Imaginemos una firma que produce un bien final usando tres insumos (capital, trabajo y materiales) y cuya tecnología se resume en la siguiente función de producción:

$$Q = \text{Min}\, \{\alpha\, (K^2 + L^2)^{1/2}, \beta M\} \qquad \alpha,\ \beta > 0$$

donde Q designa la producción, K el capital, L el trabajo y M la materia prima. Notar que se requiere una cantidad fija de materiales por cada unidad producida, en cambio el capital puede ser sustituido por trabajo. En consecuencia, M = Q/β. Por lo tanto, el problema se restringe a determinar cuanto trabajo y capital utilizar, es decir,

$$\text{Min } p_k K + p_l L$$

$$\text{s.a. } \alpha(K^2 + L^2)^{1/2} \geq Q$$

donde $p_K$ designa el pago al capital y $p_L$ al salario. Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\lambda\alpha\frac{K}{(K^2+L^2)^{1/2}} \geq p_k; \qquad \text{se cumple con igualdad si } K > 0.$$

$$\lambda\alpha\frac{L}{(K^2+L^2)^{1/2}} \geq p_l; \qquad \text{se cumple con igualdad si } L > 0.$$

Suponiendo una solución interior, es decir K > 0 y L > 0, se tiene que:

$$\frac{K}{L} = \frac{p_k}{p_l}$$

Como se ilustra en la figura 5, la solución anterior es un pésimo.

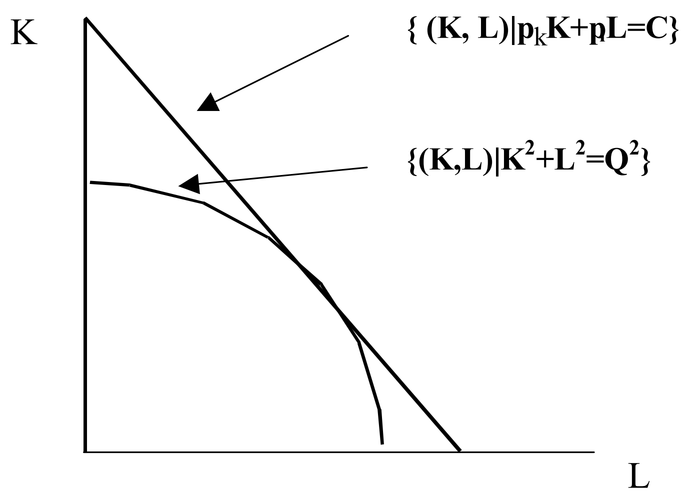



**Figura Nº5: Condiciones de Primer Orden**

La solución óptima está caracterizada por las siguientes expresiones:

$$si\ p_k > p_l \quad K = \frac{Q}{\alpha}, \quad L = 0$$

$$si\ p_k < p_l \quad L = \frac{Q}{\alpha}, \quad K = 0$$

En consecuencia, la función de costos se puede expresar como:

$$\Phi(Q, p_k, p_l, p_m) = p_m \frac{Q}{\beta} + Min\{p_k, p_l\}\frac{Q}{\alpha}$$

donde $p_m$ designa el precio de los materiales.

Ahora imaginemos una firma con las mismas condiciones del problema anterior, salvo que la función de producción está dada por:

$$Q = \text{Min } [\alpha (K^{1/2} + L^{1/2})^2, \beta M]$$

Nuevamente el problema se restringe a encontrar la combinación óptima de capital y trabajo, es decir,

$$\text{Min } p_k K + p_l L$$

$$\text{s.a.: } \alpha (K^{1/2} + L^{1/2})^2 \geq Q$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\lambda\alpha \frac{K^{1/2} + L^{1/2}}{K^{1/2}} = p_k$$

y

$$\lambda\alpha \frac{K^{1/2} + L^{1/2}}{L^{1/2}} = p_l$$

Notar que las dos condiciones anteriores se deben cumplir como igualdad. Luego se tiene:

$$\frac{K}{L} = \frac{p_l{}^2}{p_k{}^2}$$

y reemplazando en la función de producción:

$$\alpha(1 + \frac{p_l}{p_k})^2 L = Q$$

de donde se sigue que:

$$L = \frac{Q p_k{}^2}{\alpha(p_k + p_l)^2}, \qquad K = \frac{Q p_l{}^2}{\alpha(p_k + p_l)^2}$$

y la función de costos está dada por:

$$\Phi(Q, p_k, p_l, p_m) = \frac{p_m}{\beta} Q + \frac{(p_l^2 p_k L + p_k^2 p_l K)}{\alpha(p_k + p_l)^2} Q = \left[\frac{p_m}{\beta} + \frac{p_k p_l}{\alpha(p_k + p_l)}\right] Q$$

## 2.3 Propiedades de la Función de Costos

La función de costos posee 3 propiedades básicas y varias que se derivan de éstas. Las propiedades básicas son:

a.- $\Phi$ es linealmente homogénea en r para cada valor de q.
b.- $\Phi$ es una función cóncava en r para cada valor de q.
c.- $\Phi$ cumple el llamado Lema de Shepard;

$$\frac{\partial \Phi(q,r)}{\partial r_i} = w^i(q,r)$$

$$\frac{\partial \Phi(q,r)}{\partial q} = w^0(q,r)$$

Imponiendo restricciones en la función de producción podemos obtener condiciones adicionales en $\Phi$ como veremos más adelante.

**Prop. 9 :** $\Phi$ es linealmente homogénea en r para cada q. Luego, cuando el precio de todos los factores aumenta en un 10%, el costo aumenta en 10%, es decir,

$$\Phi(q,\alpha r) = \alpha \Phi(q,r)$$

**Dem.:** $\Phi(q,\alpha r) = \sum_i^n r_i w^i(q,\alpha r)$

Cuando los precios están dados por el vector $\alpha$r la canasta de insumos $w^i(q, r)$, i =1,...,n, también permite producir q, por lo que

$$\Phi(q,\alpha\, r) \le \alpha \sum_i^n r_i w^i(q,r) = \alpha\, \Phi(q,r)$$

Cuando los precios están dados por el vector r la canasta de insumos $w^i(q, \vartheta r)$ también permite producir q, luego

$$\Phi(q,r) \le \sum_i^n r_i w^i(q,\alpha\, r) = \frac{1}{\alpha}\Phi(q,\alpha\, r)$$

De donde se concluye que:

$$\Phi(q,\alpha\, r) = \alpha\, \Phi(q,r)$$

**Prop. 10:** $\Phi$ es una función cóncava en los precios de los insumos para cada nivel de producción, es decir,

$$\Phi(q, r^\alpha) \ \ge\ \alpha\, \Phi(q, r^1) \ +\ (1 - \alpha)\, \Phi(q, r^2)$$

donde $r^{\alpha} = \alpha r^1 + (1-\alpha)r^2$ designa al precio promedio ponderado.

**Dem.** Se tiene que $\Phi(q,r^k) = \sum_i^n r_i^k w^i(q,r^k)$ , para k=1,2, $\vartheta$. Además

$$\alpha\sum_i^n r_i^1 w^i(q,r^{\alpha}) \geq \alpha\Phi(q,r^1)$$

y

$$(1-\alpha)\sum_i^n r_i^2 w^i(q,r^{\alpha}) \geq (1-\alpha)\,\Phi(q,r^2)$$

Luego

$$\Phi(q,r^{\alpha}) = \sum_i^n r_i^{\alpha} w^i(q,r^{\alpha}) \geq \alpha\,\Phi(q,r^1) + (1-\alpha)\,\Phi(q,r^2)$$

Esta propiedad tiene la siguiente interpretación intuitiva. Supongamos que la firma enfrenta precios cambiantes en sus insumos; un $\alpha$% de las veces prevalece la lista de precios $r^1$, mientras que la lista de precios $r^2$ rige una fracción $(1-\alpha)$ del tiempo. La firma tiene 2 estrategias posibles. La primera consiste en cada momento usar la combinación óptima de insumos dados los precios vigentes. La segunda estrategia es usar permanentemente la combinación de insumos que minimiza costos dados los precios promedios. Si la firma no cambia la combinación de factores para seguir los cambios de precios entonces, el costo promedio es mayor que si en todo momento adapta el uso de factores a los precios vigentes.

**Prop. 12:** (Lema de Shepard) Al diferenciar la función de costos con respecto al precio de un insumo se obtiene la función de demanda por ese insumo y (ii) al diferenciar la función de costos con respecto al nivel de producción se obtiene el multiplicador de Lagrange.

**Dem.**: Este resultado se demuestra utilizando el teorema de la envolvente (ver apéndice). Aquí usamos un argumento heurístico para derivar el Lema de Shepard. Por definición

$$\Phi(q,r) = \sum_{i=1}^n r_i w^i(q,r)$$

Derivando la igualdad anterior con respecto al precio del primer insumo

$$\frac{\delta\Phi(q,r)}{\delta r_1} = w^1(q,r) + \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial w^i(q,r)}{\partial r_1}$$

En el lado derecho de la ecuación anterior el primer término corresponde al efecto directo, mientras que el segundo al efecto indirecto. Debemos mostrar que el efecto indirecto es nulo. Recordemos que al derivar la función de costos, las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$r_i - \lambda f_i \geq 0 \qquad x_i (r_i - \lambda f_i) = 0 \qquad i = 1, ..., n$

Cuando un insumo no se usa y la desigualdad anterior es estricta, podemos suponer que una variación infinitesimal en el precio del insumo 1 no cambia dicha situación. Lo anterior podemos ilustrarlo gráficamente para el caso de dos insumos. Consideremos una solución de esquina caracterizada por $x_2 = 0$, $x_1 > 0$. En dicho punto la pendiente de la isocuanta es mayor que la de isocosto. Un cambio marginal en el precio de un insumo modifica la curvatura de la línea de isocosto infinitesimalmente, por lo que la pendiente de la isocuanta permanece mayor a la isocosto, manteniéndose la desigualdad estricta en las condiciones de Kuhn-Tucker y el valor de $x_2$ en cero.

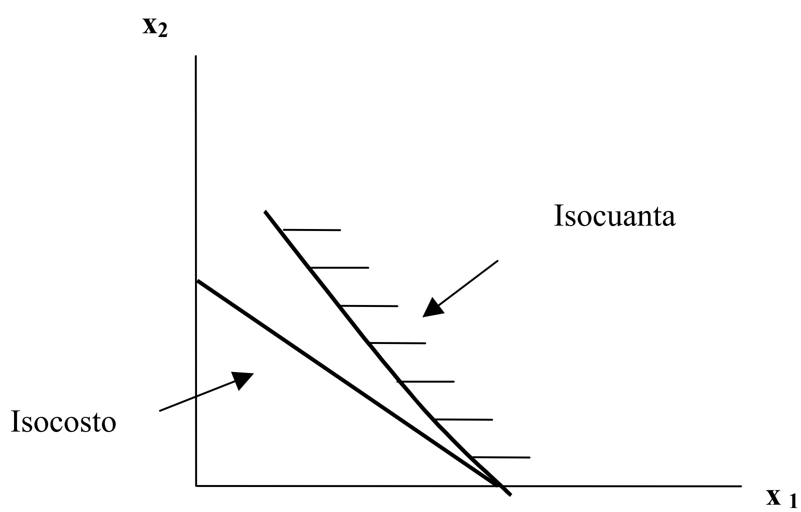



**Figura Nº 6: Solución Esquina**

Con esta discusión en mente, podemos suponer que $\partial w^i(q, r)/\partial r_1 = 0$ para los insumos que no están siendo usados y los términos correspondientes en la expresión de los efectos indirectos pueden ser ignorados. Entonces podemos sustituir la expresión $\lambda f_i$ por $r_i$ en el efecto indirecto, lo que nos lleva a:

$$\frac{\delta \Phi(q,r)}{\delta r_1} = w^1(q,r) + \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial w^i(q,r)}{\partial r_1}$$

Tomando la función de producción q = f (x) y considerando que la cantidad óptima de cada insumo requerida para producir q a mínimo costo es función del vector de precios r, diferenciamos con respecto a $r_1$, el resultado es:

$$\frac{\delta q}{\delta r_1} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial w^i(q,r)}{\partial r_1}$$

Luego:

$$\frac{\delta\Phi(q,r)}{\delta r_1} = w^1(q,r) + \lambda \frac{\delta q}{\delta r_1}$$

Puesto que se minimizan los costos para un valor de q dado, la variación de $r_1$ no produce cambios en q, es decir, $\partial q / \partial r_1 = 0$, y

$$\frac{\delta\Phi(q,r)}{\delta r_1} = w^1(q,r)$$

Con argumentos similares podemos verificar que λ es igual al costo marginal (CM).

$$CM = \frac{\delta\Phi(q,r)}{\delta q} = \Phi_0(q,r)$$

$$CM = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\delta w^i(q,r)}{\delta q}$$

Reemplazando los $r_i$ por $\lambda\ f_i$

$$CM = \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\delta w^i(q,r)}{\delta q}$$

Tenemos la siguiente identidad

$$q = f(w^1(q,r), w^2(q,r), \ldots, w^n(q,r))$$

Diferenciando la igualdad anterior con respecto a q.

$$1 = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\delta w^i(q,r)}{\delta q}$$

de donde se concluye que CM = λ.

Notar que al derivar la función de costos con respecto al argumento i-ésimo ($r_i$ ) obtenemos $w^i(q, r)$. Por su parte al derivar la función de costos con respecto al argumento 0 el resultado es el multiplicador de Lagrange, lo que explica la conveniencia de usar la notación $w^0(q, r)$ para el multiplicador de Lagrange.

## 2.4 Corolarios

Ahora introducimos resultados que se derivan de las propiedades básicas de la función de costos.

a. Resultados de Homogeneidad

A partir de la propiedad de homogeneidad lineal de la función de costos podemos obtener una familia de resultados.

( i ) La derivada de la función de costos con respecto al precio de cualquier insumo, para q dado, es una función homogénea de grado 0 por Teorema de Euler. El Lema de Shepard nos dice que las funciones de demanda por insumos son:

$$\Phi_i = w^i(q, r)$$

Luego $w^i$ es homogénea de grado 0 en r, para cada q. Por lo tanto, las funciones de demanda dependen sólo de los precios relativos y no de los absolutos.

( ii ) La suma de las elasticidades precio de la demanda del insumo 1 con respecto al precio de los restantes insumos es 0. Dado que las funciones de demanda son homogéneas de grado cero,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial w^1(q,r)}{\partial r_i} = 0$$

Multiplicando esta ecuación por $1/w^1(q, r)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{w^1(q,r)} \cdot \frac{\partial w^1(q,r)}{\partial r_i} = 0$$

b. Resultados de Concavidad

La función de costos es cóncava en r para cada q, por lo tanto la matriz Hessiana de $\Phi$ es semidefinida negativa.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots \Phi_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \Phi_{n1} \ldots\ldots\ldots\ldots \Phi_{nn} \end{bmatrix}$$

Ahora por Lema de Shepard:

$$\Phi_{ij} \equiv \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r_i \delta r_j} = \frac{\delta w^i}{\delta r_j}$$

Luego el Hessiano de ϕ es equivalente, por Lema de Hotelling, a:

$$\begin{bmatrix} w_1^1 \ldots\ldots w_2^1 \ldots\ldots w_n^1 \\ w_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots w_n^2 \\ . \\ . \\ . \\ w_1^n \ldots\ldots\ldots\ldots w_n^n \end{bmatrix}$$

El elemento (i,j) de la matriz muestra el efecto que produce la variación del precio del insumo i sobre la demanda del insumo j. La diagonal de la matriz es no positiva y usualmente negativa. Este es un resultado esperado: las curvas de demanda por insumos tienen pendientes no positivas, es decir,

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_i} \leq 0 \qquad i = 1,2....,n$$

c. Resultados de Simetría

Suponiendo que la función de costos es de la clase de funciones 2 veces diferenciables, $\Phi_{ij} = \Phi_{ji}$ resulta de la independencia en el orden de la diferenciación, por lo que se cumple

$$\frac{\partial x_j}{\partial r_i} = \frac{\partial x_i}{\partial r_j}$$

Aún en el caso que los precios y/o cantidades estén expresados en diferentes unidades se obtiene el mismo valor numérico en ambos lados de la igualdad. Este es un resultado difícil de obtener en una teoría que no se suponga un comportamiento optimizante en los agentes. De este modo, el resultado de simetría cruzada casi llega a ser una prueba de la validez de la teoría neoclásica.

Simetría cantidad-precio. Dado que el orden en la diferenciación no es importante, $\Phi_{0i} = \Phi_{i0}$, luego usando el Lema de Shepard se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial r_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_i \partial q}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial q} = \frac{\partial \lambda}{\partial r_i}$$

**Nota:** Insumo inferior es aquel cuyo uso disminuye con la producción, es decir, $\partial x_i/\partial q > 0$. Un insumo no puede ser inferior para todo nivel de producción, puesto que su uso sólo puede caer desde un valor positivo. Un ejemplo de insumo inferior puede ser la mano de obra en un cierto rango de la producción. Es imaginable que al aumentar la producción se justifique introducir nueva maquinaria con mayor grado de automatización que permita disminuir la fuerza de trabajo. Si la nueva maquinaria fuese divisible también convendría usarla para producciones menores. Luego indivisibilidad en la tecnología es un requisito para que existan bienes inferiores.

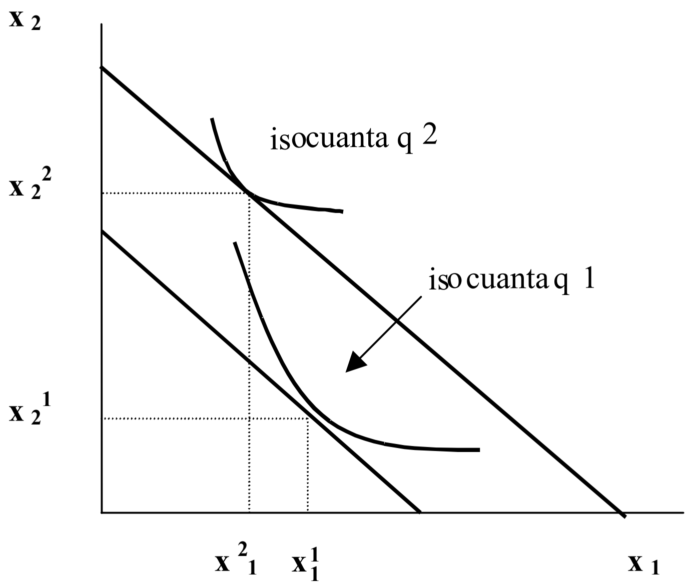



**Figura 7: Insumo Inferior**

El último resultado de simetría anterior nos muestra que un alza en el precio del insumo i disminuye el costo marginal si y sólo si el insumo es inferior. La intuición de este resultado es simple: La contribución del insumo i al costo marginal es el valor de la cantidad adicional de insumo i usada para lograr la producción adicional ($r_i\ \partial x_1/\partial q$). Entonces si $\partial x_i/\partial q<0$, un aumento en $r_i$ disminuye el costo marginal.

<u>**Resultados Adicionales**</u>

A continuación se presentan algunos resultados que se obtienen de imponer restricciones adicionales a la función de producción. Por ejemplo, es fácil probar que si la función de producción es linealmente homogénea, entonces el consumo de insumos cambia proporcionalmente con la producción.

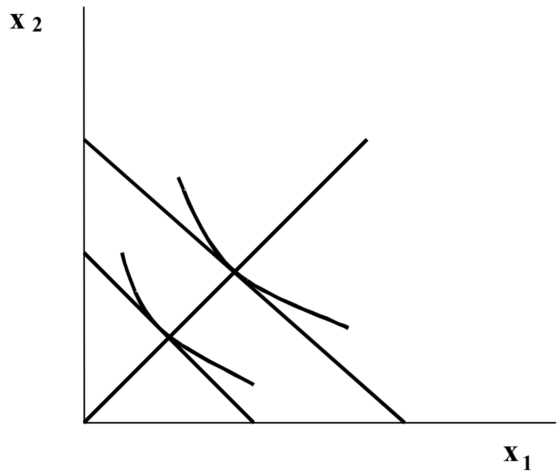



**Figura 8: Función de Producción Homogénea**

Entonces la caracterización de la producción óptima en una función de producción linealmente homogénea está completa cuando se decide cómo producir una unidad del producto. Luego

$$\Phi(q,r) = q\Phi(1,r)$$

Esto implica que las funciones de demanda por insumos tienen la forma $qw^i(1,r)$.

**Prop. 13:** Si la función de producción es cóncava entonces la función de costos es una función convexa de $q$.

**Dem.:** Queremos demostrar que para cualquier par $q^1$, $q^2$, y $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\Phi(\lambda q^1 + (1-\lambda)q^2, r) \leq \lambda\Phi(q^1, r) + (1-\lambda)\Phi(q^2, r)$$

como f es cóncava y además $f(w^1(q^j,r), w^2(q^j,r), \ldots\ldots\ldots, w^n(q^j,r)) = q^j$, j = 1,2,

$$f(\lambda w^1(q^1,r) + (1-\lambda)w^2(q^2,r), \ldots\ldots\ldots, \lambda w^n(q^1,r) + (1-\lambda)w^n(q^2,r))$$

$$\geq \lambda f(w^1(q,r), \ldots\ldots, w^n(q^1,r) + (1-\lambda) f(w^1(q^2,r), \ldots., w^n(q^2,r))$$

$$\geq \lambda q^1 + (1-\lambda)q^2$$

Luego con una fracción λ de los insumos necesarios para producir $q^1$ y una fracción (1-λ) de los recursos para producir $q^2$ se logra una producción mayor que $\lambda q^1 + (1-\lambda)q^2$. Es decir,

$$\Phi(\lambda q^1 + (1-\lambda)q^2, r) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \left[\lambda w^i(q^1, r) + (1-\lambda) w^i(q^2, r)\right]$$

Y recordando que $\Phi(q^j, r) = \sum_{i-1}^{n} r_i w^i(q^j, r)$ se obtiene el resultado.

Entonces, cuando la tecnología es convexa, la función de producción es cóncava y la función de costos es convexa. Dicho en otras palabras, cuando la tecnología presenta retornos no crecientes (decrecientes) a escala, el costo marginal es no decreciente (creciente).

# 3. Funciones de Beneficio

## 3.1 El problema de maximización de beneficios

En esta sección se caracteriza a las firmas que maximizan beneficios. Partir suponiendo que las firmas maximizan beneficios parece apropiado, pues las familias, que son las dueñas de las firmas, ven su ingreso aumentar cuando crecen los beneficios de las firmas, lo que a su vez les permite comprar más bienes y aumentar su utilidad. Luego la maximización de beneficios por parte de las firmas sería una consecuencia de la maximización de utilidades por parte de las familias. En todo caso, en la sección 5 analizamos firmas que tienen otro objetivo. También suponemos que las firmas son tomadoras de precios en los mercados de los insumos y del producto final. Luego los desarrollos que se realizan correponden a los de una firma que opera en mercados competitivos, popr lo que la función de beneficios que se deriva no corresponde a los de un monopolio. Por simplicidad se consideran firmas monoproductoras. Podemos estudiar el problema de maximización de beneficios a partir de la función de producción o bien de la función de costos.

(a) Usando la función de producción

La función de producción ya supone la optimización técnica.

$$\begin{aligned} &Max \quad p\, f(x_i, \ldots, x_n) \; - \; \sum r_i x_i \\ &s.a.: \qquad x_i \; \geq 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema de optimización son las siguientes:

$$pf_i(x_i, \ldots, x_n) - r_i \leq 0 \qquad\qquad x_i\left[pf_i - r_i\right] = 0$$

Las ecuaciones anteriores nos indican que la firma demanda un insumo hasta el punto que la productividad marginal valorada se iguala al precio y no usa el insumo cuando la productividad marginal valorada es menor a su precio. Notar además que una condición suficiente para que la solución de las ecuaciones anteriores sea óptima es que la función de producción sea cóncava.

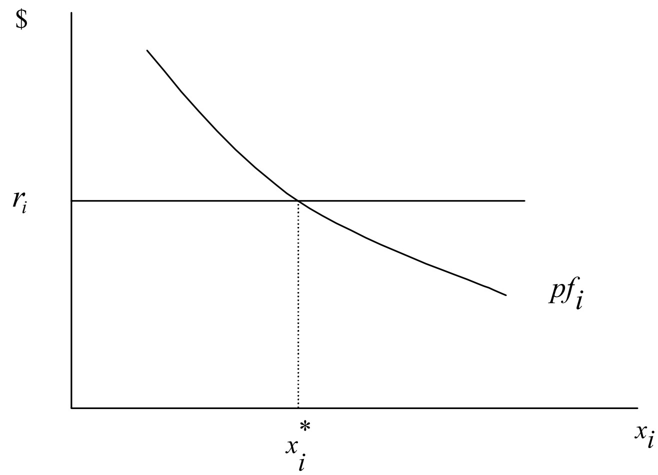



**Figura 9: Demanda por insumo**

Si suponemos que la productividades marginales son no-crecientes, entonces podemos interpretar graficamente las condiciones de primer orden. Cuando lo que que produce en valor una unidad del insumo (productividad marginal del insumo por el precio del bien final) excede su precio, entonces la utilidad aumenta usando una unidad más de ese insumo. Por el contrario, cuando la productividad marginal valorada de un insumo es inferior a su precio la utilidad aumenta usando una unidad menos de ese insumo. Luego para maximizar la utilidad hay que demandar ese insumo hasta el punto productividad marginal valorada se iguala al precio.

La solución al problema general que se obtiene resolviendo las condiciones de primer orden está caracterizada por las funciones de demanda, oferta y de beneficio. Esta solución puede no ser única. Una condición suficiente, pero no necesaria, para que la solución sea única es que la función de producción sea estrictamente cóncava. En lo que sigue se supone que la solución es única.

a. *Funciones de demanda por insumos*

$$x_i = v^i(p,r) \qquad i = 1,\ldots,n$$

Representa cuantas unidades del insumo i usa la firma cuando maximiza beneficios y los precios de los insumos están dados por *r* y el precio del bien final por *p.*

b. *Función de oferta*

$$q = \theta(p,r)$$

Denota cuantas unidades produce la firma al maximizar beneficios cuando los precios de los insumos están dados por *r* y el precio del bien final por *p.*

*b.* *Función de beneficios*

$$\pi(p,r)$$

Representa la utilidad al maximizar beneficios cuando los precios de los insumos están dados por *r* y el precio del bien final por *p*.

Y se tienen las siguientes relaciones:

$$\pi(p,r) = p\theta(p,r) - \sum r_i v^i(p,r)$$

$$\theta(p,r) = f(v^1(p,r),\ldots,v^n(p,r))$$

$$v^i(p,r) = w^i(\theta(p,r),r)$$

$$\pi(p,r) = p\theta(p,r) - \Phi(\theta(p,r),r)$$

(b) Usando la función de costos

Si la función de costos es conocida, entonces puede ser usada para derivar la función de beneficios. Ahora el problema de maximización consiste en:

$$Max \quad pq - \Phi(q,r)$$

$$s.a.: \; q \geq 0$$

Cuya condición de primer orden está dada por:

$$p - \Phi_0(p,r) \leq 0 \qquad q[p - \Phi_0(p,r)] = 0$$

Este resultado nos indica que la firma incrementa su producción hasta el punto que el costo marginal de la última unidad se iguala al precio del bien que produce. Luego la función de oferta de la firma es igual a su función de costo marginal.

Una condición suficiente para que los puntos que cumplen la condición de primer orden sean óptimos, es que la función $\Phi$(q,r) sea convexa en q para cada vector r. Es decir, los costos marginales deben ser no decrecientes. Cuando la función de costos es estrictamente convexa entonces existe una única solución, pero si no lo es pueden haber muchas soluciones. En particular si existen retornos constantes a escala el número de soluciones puede ser infinito. En efecto, se tiene:

$$\pi(q,r) = pq - \Phi(q,r) = \left[p - \Phi(1,r)\right]q$$

*Luego*

$$Si \quad \begin{cases} p > \Phi(1,r) & \pi \to \infty \text{ cuando } q \to \infty, \text{ luego no existe solución.} \\ p = \Phi(1,r) & \pi = 0 \text{ para cualquier } q, \text{ luego cualquier } q \text{ es solución} \\ p < \Phi(1,r) & q = 0 \text{ es la solución única} \end{cases}$$

La solución cuando hay retornos constantes a escala parece altamente inestable. En efecto, un pequeño cambio en el precio del bien haría que la producción pasase de cero a infinito. Sin embargo, en el largo plazo la entrada y salida de firmas hace que el precio sea igual a Φ(1, r). En efecto, si Φ(1, r) > p las firmas pierden plata y van saliendo del mercado, y con la disminución de la oferta el precio disminuye. Por el contrario, cuando Φ(1, r) < p, las firmas tienen utilidades por sobre lo normal, en cuyo caso la entrada de nuevas firmas hace caer el precio. Y en el corto plazo es difícil pensar que existan firmas de alguna significación que tengan retornos constantes a escala, pues al menos algún insumo estará fijo.

Ahora, si la función de costos no es convexa en q para cada r, entonces puede no existir solución. Por ejemplo, si la función de costos es cóncava, el costo marginal es decreciente, y no existe una solución con firmas tomadoras de precios. En efecto, todas las firmas van a tender a producir más para bajar sus costos medios, lo que lleva a que no exista un equilibrio cuando hay varias firmas. Los casos en que los costos marginales son decrecientes es más eficiente que exista una sola firma, dando origen a los llamados monopolios naturales que analizamos más adelante.

En muchos libros se dibujan curvas de costo total, en forma de s. En este caso existen 2 puntos que cumplen la condición de primer orden, uno de ellos es un óptimo, el otro es un pésimo.

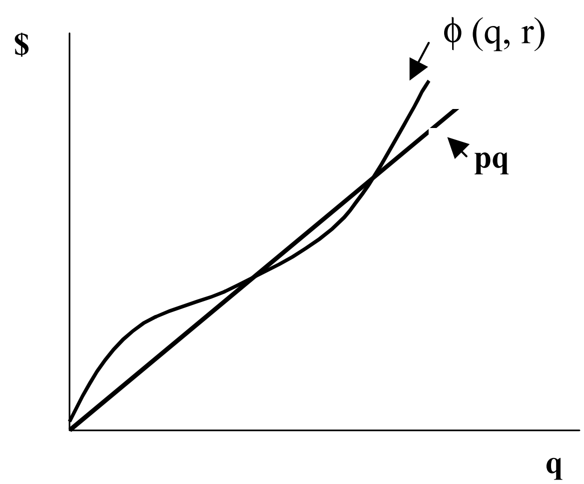



**Figura 9: Curva de Costo Total**

## 3.2 Propiedades de la función de Beneficios

La función de beneficios posee tres propiedades básicas: (i) es linealmente homogénea en los precios; (ii) es convexa en los precios y (iii) el efecto de un cambio en un precio se reduce al efecto directo (Lema de Hotelling). Estas propiedades y su demostración son análogas a las de la función de costos. La demostración de la primera propiedad es simple y se omite. Además su interpretación es directa: cuando todos los precios, tanto de los insumos como del producto final, aumentan en una mismo porcentaje, los beneficios (nominales) aumentan en la misma proporción.

**Prop. 13:** La función de beneficios es convexa en los precios, es decir

$$\pi(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2, \lambda r^1 + (1-\lambda)r^2) \leq \lambda\pi(p^1, r^1) + (1-\lambda)\pi(p^2, r^2)$$

Dem.: Definamos $p^\lambda = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2$, $r^\lambda = \lambda r^1 + (1-\lambda)r^2$, y sea $q^\lambda$ el nivel óptimo de productos cuando los precios son $p^\lambda$ y $r^\lambda$, es decir $q^\lambda = \theta(p^\lambda, r^\lambda)$. Luego

$$\pi(p^\lambda, r^\lambda) = p^\lambda q^\lambda - \Phi(q^\lambda, r^\lambda)$$

$$\leq p^\lambda q^\lambda - \lambda\Phi(q^\lambda, r^1) - (1-\lambda)\Phi(q^\lambda, r^2) \qquad \textit{por concavidad de } \Phi$$

$$= \lambda(p^1 q^\lambda - \Phi(q^\lambda, r^1)) + (1-\lambda)(p^2 q^\lambda - \Phi(q^\lambda, r^2)) \qquad \textit{por definición de } p^\lambda$$

$$= \lambda\pi(p^1, r^1) + (1-\lambda)\pi(p^2, r^2) \qquad \textit{por definición de } \pi$$

La interpretación económica de este resultado es análoga al caso de la función de costos: la firma que se adapta a los cambios de precios tiene utilidades mayores.

**Prop. 14**: La función de beneficios cumple el Lema de Hotelling, es decir,

$$\frac{\partial\pi(p,r)}{\partial p} = \theta(p,r)$$

$$\frac{\partial\pi(p,r)}{\partial p} = -v^i(p,r)$$

Dem.: El problema de maximización es

$$Max \quad pf(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

Y el valor de la solución óptima es:

$$\pi(p,r) = p\ f(v^1(p,r),\ldots,v^n(p,r) - \sum_{i=1}^{n} r_i v^i(p,r)$$

Luego, por teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial\pi(p,r)}{\partial p} = f(v^1(p,r),\ldots,v^n(p,r)) = \theta(p,r)$$

y

$$\frac{\partial\pi(p,r)}{\partial r_i} = -v^i(p,r)$$

**Corolarios:**

a) De las propiedades (i) y (iii) se deduce que las funciones $\theta(p,r)\ y\ v^1(p,r)$ son homogéneas de grado cero.

b) La matriz del Hessiano de la función $\pi$ es semi-definida positiva

$$\begin{bmatrix} \pi_{00} & . & . & . & . & \pi_{0n} \\ \pi_{10} & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ \pi_{n0} & . & . & . & . & \pi_{nn} \end{bmatrix}$$

Luego la función de oferta tiene pendiente no-negativa, es decir

$$\pi_{00} = \frac{\partial\theta(p,r)}{\partial p} \geq 0$$

y las funciones de demanda tienen pendiente no-positiva

$$\pi_{ii} = -\frac{\partial v^i(p,r)}{\partial r_i} \geq 0$$

Esta última proposición se obtiene un resultado muy conocido: la oferta aumenta (o al menos no disminuye) cuando aumenta el precio del bien, y el uso de un insumo disminuye (o al menos no aumenta) cuando sube su precio. Luego la oferta de cada firma es no decreciente en el precio del bien que produce. Como la suma de funciones no-decrecientes es una función no decreciente, podemos deducir que oferta de la industria tiene pendiente no-negativa en el precio del bien que elabora.

c) Simetrías

$$\frac{\partial v^i}{\partial r_j} = -\pi_{ij} = -\pi_{ji} = \frac{\partial v^j}{\partial r_i}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial p} = -\pi_{i0} = -\pi_{0i} = -\frac{\partial \theta(p,r)}{\partial r_i}$$

Estos resultados sólo son consecuencias de la maximización de utilidades y de que la función f se comporte bien, de modo que el problema de maximización tenga solución.

# 4. Criticas a la Teoría de la Firma Competitiva

La teoría de la firma expuesta en las secciones anteriores supone que (i) la firma está en la frontera tecnológica y (ii) elige un nivel de producción tal que el costo marginal es igual al precio. Es decir se supone que la firma es erficiente tanto en el intercambio en el mercado como en la producción interna. Pero las firmas no siempre son tan eficientes en el intercambio como en la producción (por ejemplo, véase McNulty). En la práctica pocas firmas efectivamente igualan su costo marginal al precio del producto que venden y, por otro lado, las firmas no siempre están en su frontera tecnológica. Además, podemos agregar, maximizar beneficios no siempre es el objetivo de la firma.

## 4.1 Fijación de Precios y Cantidades

Cuando surge un nuevo producto o se producen cambios importantes en el mercado de modo que el nuevo precio de equilibrio es desconocido, se utilizan diversos métodos experimentales para determinar el precio. Uno de los más usados es el mark-up (margen); el precio se determina como costo medio más un margen. Este procedimiento en general no maximiza las utilidades, pero puede perdurar por un largo tiempo si todas las firmas actúan de forma similar. Veamos como ejemplo el caso de la demanda por entradas de cine. Si se produce una fuerte caída en la demanda, entonces el costo medio por espectador sube. Si se aplica una política de mark-up el precio sube sustancialmente, al menos en el corto plazo. En el largo plazo el precio debe bajar cuando varios cines hayan cerrado sus puertas.

La conclusión es que en el corto plazo pueden haber firmas que no estén minimizando costos ni maximizando utilidades. Algunos autores señalan que no es importante que las firmas conscientemente fijen un precio igual a costo marginal, pues lo que ocurre en la práctica es que sólo sobreviven aquellas empresas que, digamos por casualidad, igualan el precio al costo marginal. Al analizar el equilibrio de mercado volveremos sobre este punto.

## 4.2 Ineficiencias X (Leibenstein)

A veces existen ineficiencias en la producción que pueden ser más importantes que las ineficiencias de mercado. La competencia también implica el esfuerzo de rebajar los costos o introducir nuevos productos a través de investigación y desarrollo. Los modelos de intercambio habitualmente suponen que las firmas minimizan costos en forma estática. Algunos de los problemas que se pueden presentar al interior de una firma son las llamadas Ineficiencias X, una de las cuales es la entropía.

Las firmas traducen oportunidades y restricciones (especialmente financieras) externas en oportunidades internas. Los administradores traducen las señales externas e intentan dar un sentido de dirección y control dentro de la firma. Sus funciones son:

(1) Recibir las señales externas.
(2) Transmitir instrucciones a través de la organización.
(3) Evaluar rendimientos de los grupos internos.
(4) Trasmitir incentivos a través de la organización.
(5) Dar señales de cambio es el tamaño de la organización en el transcurso del tiempo.
(6) Luchar contra la entropía.

Luchar contra la entropía implica establecer jerarquías y coordinar los grupos de modo que los propósitos colectivos de la firma sean llevados a cabo por sobre los intereses privados que disminuyen la coordinación entre las diferentes partes.

> *La Hipótesis de la Señal Inversa.* *La estructura jerárquica de la firma requiere de coordinación desde arriba, esto implica un flujo de señales en ambos sentidos. Las señales se pueden dividir en instrucciones y de motivación. Pero las instrucciones también incluyen señales de motivación. Cada persona tiene una apreciación de su posición dentro de la firma. Si las instrucciones exceden la posición que la persona cree tener, esta es una motivación positiva. Por el contrario, si las instrucciones son muy específicas la persona las puede interpretar como desconfianza y afectar negativamente su motivación. Por otro lado las señales de motivación (felicitaciones o reprimendas) también entregan información respecto al rendimiento esperado. La Hipótesis de la Señal inversa establece que entre más frecuentes y precisas son las instrucciones, menores son las señales de motivación que dan y menos efectivas son las señales de motivación directas. La explicación de esta ley es que los individuos tienen una capacidad limitada para recibir señales. En consecuencia existe una mezcla óptima de señales, la que no es simple de determinar.*

### 4.3 Empresas que no maximizan utilidades

Pueden existir firmas cuyo objetivo no es maximizar utilidades. Se consideran tres casos.

*- Ejecutivos de empresas tienen objetivos propios*

En microeconomía existe un dogma; en una operación de intercambio las dos partes ganan. La explicación es evidente: de otro modo uno de los interesados no aprobaría la operación. La situación es más compleja cuando el principal (dueño) es representado por un agente (ejecutivo). Entonces es posible que el agente lleve a cabo una operación perjudicial para su representado. Este es el denominado problema del agente – principal. ¿Por qué ocurriría esto? Existen al menos dos respuestas posibles.

- El objetivo del agente es maximizar su función objetivo que no coincide con la de su representado. Por cierto el agente tiene que tener en cuenta la función objetivo del representado, porque de otra manera corre el riesgo de perder el empleo.

- El agente, por aversión al riesgo o incapacidad, interpreta en forma rígida las instrucciones del empleador.

El primer caso se produce principalmente cuando son muchos los representados y se diluye el control, o no son conocidos claramente los objetivos de los representados. Esto ocurre principalmente en sociedades anónimas.

> *El objetivo de los ejecutivos es la permanencia en el cargo, por lo cual evitan tomar decisiones que son muy promisorias pero riesgosas, sobre todo cuando se refiere a innovaciones tecnológicas. Los ejecutivos temen ser despedidos si el proyecto falla, aunque la decisión haya sido apropiada, (y la esperanza de volver a encontrar un trabajo es baja cuando esto ocurre). El efecto de esta cautela por parte de los ejecutivos sería que el avance tecnológico se hace en pequeñas firmas, como por ejemplo Apple en sus inicios y las grandes empresas se expanden comprando otras empresas.*

A continuación formalizamos el problema del agente principal. Los ejecutivos de las grandes empresas modernas son agentes de los dueños, y pueden adoptar objetivos que favorecen sus intereses personales. Supongamos que el prestigio y/o el sueldo de los ejecutivos está relacionado al tamaño de la empresa, entonces su objetivo es maximizar el ingreso de la empresa, sujeto por cierto a que la empresa tenga utilidades razonables $\pi_O$.

$$\begin{aligned} &Max \quad pq \\ &\underline{sa.} \quad pq - \Phi(q, r) \geq \pi_O \end{aligned}$$

si la restricción es activa, y λ designa el multiplicador de Lagrange, la condición de primer orden es:

$$p(1+\lambda) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q}$$

la cual difiere de la condición de maximización de beneficios, en consecuencia no se maximizan las utilidades.

Una forma de alinear los objetivos de los ejecutivos de las empresas con la de sus dueños es entregar a los primeros opciones de compra de acciones a un precio determinado. Luego los ejecutivos tendrían incentivos para aumentar los beneficios y con ello subir los precios de las acciones. El riesgo, como lo muestra el caso de Emron, es que los precios de las acciones pueden ser subidos artificialmente en forma transitoria, mientras los ejecutivos venden sus acciones.

- *Empresas de Trabajadores*

Consideremos una empresa donde los trabajadores son los dueños, y supongamos por simplicidad que las utilidades son repartidas en forma proporcional entre los trabajadores. Luego el propósito es maximizar el ingreso de cada trabajador, el cual está dado por:

$$Max \frac{1}{x_1}\left\{ pf(x_1,...,x_n) - \sum_{i=2}^{n} r_i x_i \right]$$

Donde $x_1$ es el número de trabajadores. Las condiciones de primer orden son:

$$pf_i = r_i \qquad i = 2,..., n$$

$$pf_1 = \frac{1}{x_1}\left[ pf - \sum_{i=2}^{n} r_i x_i \right]$$

Se incorporan nuevos trabajadores hasta que su contribución al ingreso sea igual al ingreso medio por trabajador. En consecuencia se emplean menos trabajadores en una empresa de trabajadores que en una empresa privada, dado que la productividad marginal del trabajo es decreciente.

- *Instituciones Públicas*

Cuando el estado es dueño de los medios de producción define la función objetivo para la institución. Podrá pedirles a los ejecutivos que maximicen beneficios, en cuyo caso no existe diferencia con el caso general. Pero a veces puede pedirles que maximicen la producción (por ejemplo: el nivel de servicios en el caso de la salud). En este caso el problema es:

Max q

<u>sa:</u> $\Phi(q, r) - pq \leq F_O$

Donde $F_O$ es lo máximo que el estado esta dispuesto a financiar la empresa. Obviamente no se logra la maximización de las utilidades. En este caso también es posible que los ejecutivos de la empresa no cumplan en los objetivos propuestos por el Estado.

## A P E N D I C E

### Teorema de la Envolvente

Este apéndice presenta la demostración del teorema de la envolvente para un problema de optimización no restringido. La demostración es muy intuitiva como se podrá ver.

Consideramos una función f(x, $\alpha$) dos veces diferenciables en la variable x. Si maximizamos f con respecto a x, la condición de primer orden es:

$$f_x(x,\alpha)=0$$

El valor de la solución es una función de $\alpha$ que denotaremos $x = h(\alpha)$. Definiendo la función g ($\alpha$) como:

$$g(\alpha)=\underset{x}{Max}\, f(x,\alpha)$$

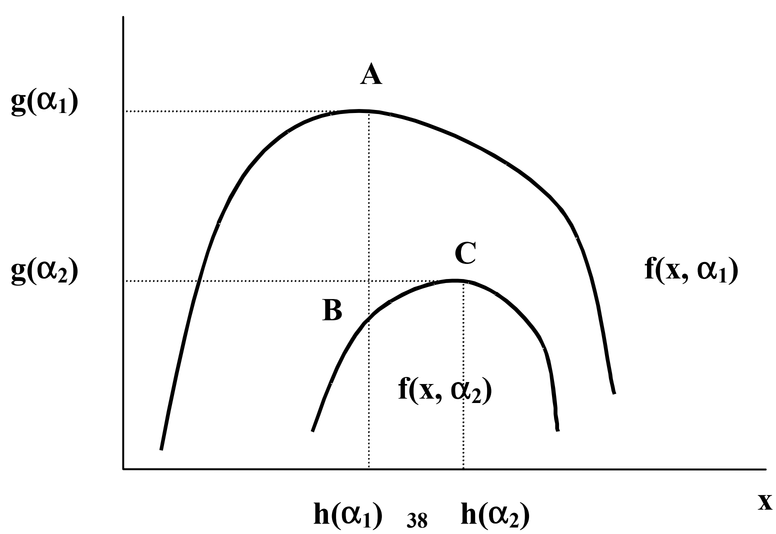
Se sigue que:

$$g(\alpha)=f(h(\alpha),\alpha)$$

Diferenciando la función g se tiene

$$g'(\alpha) = \underbrace{f_\alpha(h(\alpha))}_{\textit{efecto directo}} + \underbrace{f_x(h(\alpha),\alpha)\, h'(\alpha)}_{\textit{efecto indirecto}}$$

Sin embargo, en el punto óptimo se cumple que $f_x(h(\alpha),\alpha) = 0$, entonces $g'(\alpha) = f_\alpha$ . Luego el impacto de un cambio en el parámetro $\alpha$ se reduce al efecto directo. Ilustramos el resultado anterior con el siguiente gráfico,



Un cambio en $\alpha$ tiene dos consecuencias:

(i) El efecto directo con x fijo, movimiento a una nueva curva $A \rightarrow B$.

(ii) Ajuste de x que se mueve al tope de la nueva curva $B \rightarrow C$.

El segundo efecto, moviéndose a lo largo de la nueva curva, es una pequeña fracción de cambio total en g ($\alpha$), para todas las curvas que son relativamente planas en el tope.